Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ANALYSE 1

Examen terminal, le 4 janvier 2017, 8h00-11h00

Documents et calculatrices interdits. Justifier les réponses.

Exercice 1. Dire pour chaque assertion ci-dessous si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, expliquer pourquoi. Si elle est fausse, donner un contre-exemple explicite.

a. Si a et b sont des nombres réels tels que $ab = 1$, alors $a = 1$ et $b = 1$.

b. Pour tout nombre réel x on a $\sqrt{x^2} = x$.

c. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ est identiquement nulle.

d. Pour une fonction dérivable bijective $f : D \to E$ on a $(f^{-1})' = (f')^{-1}$.

e. Si deux fonctions dérivables f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfont $f(x) = g(x)$ quel que soit x dans $\mathbb{R}$, alors $f'(x) = g'(x)$ quel que soit x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sin^4(x) - \cos^4(x).$$

a. Montrer que $f'(x) = 2\sin(2x)$ en dérivant f directement et en simplifiant ensuite.

b. En déduire que $f(x) = -\cos(2x)$.

c. Peut-on montrer que $f(x) = -\cos(2x)$ sans passer par la dérivée de f ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = -\arctan^2(x) - 2\arctan(x) + 3$$

a. Déterminer $f'(x)$.

b. Déterminer le point critique a de f.

c. Déterminer $f''(x)$.

d. Déterminer le signe de f'' en $x = a$.

e. En déduire que f prend une valeur extrémale locale en $x = a$. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

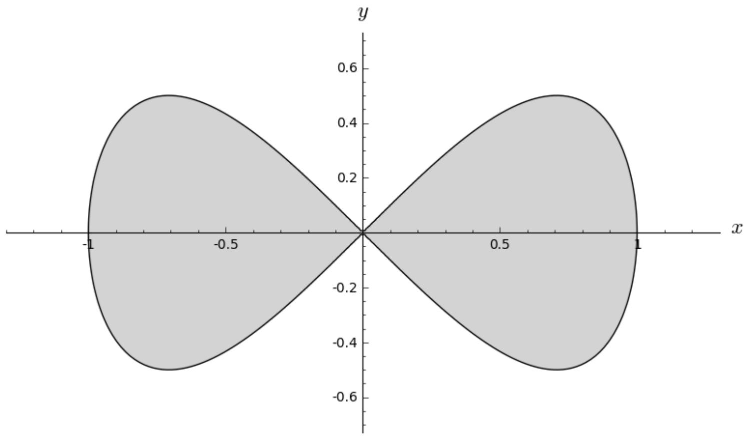
Exercice 4. Déterminer les primitives de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\arctan(x).$$

(Indication : intégration par parties.)

T. S. V. P.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer l'aire A du noeud de papillon ci-dessous dont le bord est la courbe d'équation $y^2 = x^2(1-x^2)$:



a. Dire pourquoi
$$A = 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

b. Déterminer cette dernière intégrale en faisant la substitution $x = \sin(t)$.

c. En déduire A.

Exercice 6. a. Résoudre l'équation différentielle $f' = e^f$.

b. Résoudre l'équation différentielle $f' = e^f + 1$.

c. Déterminer l'unique solution de cette dernière dont le domaine de définition est l'intervalle $]-\infty, 0[$.

Barème sur 20 points :

Exercice 1	5 pt
Exercice 2	3 pt
Exercice 3	3,5 pt
Exercice 4	2 pt
Exercice 5	3,5 pt
Exercice 6	3 pt